1. ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

1.1 Основные понятия теории вероятностей

Многие объекты в математике определяются указанием операций, которые можно выполнять над объектами, и перечислением свойств, которым удовлетворяют операции. Теория вероятностей оперирует с *событиями* и *вероятностями*; эти понятия формально не определяются. Целью теории вероятностей является выявление закономерностей, которым подчиняются события. Для описания событий теория вероятностей привлекает математические методы. По своему методу и теория вероятностей, и основанная на ней математическая статистика являются строгими и логически точными разделами математики.

Содержание понятия события раскрывается в следующих определениях.

1. Событие $\varnothing$ называют *невозможным*, если оно не может произойти.

2. Событие U называют достоверным, если оно не может не произойти.

3. События называют *несовместными*, если появление любого из них исключает появление любого другого.

4. События называют *равновозможными*, если нет оснований считать любое из них более возможным, нежели любое другое.

5. События называют *независимыми*, если появление любого из них не сказывается на возможности появления любого другого.

6. События образуют *полную группу*, если должно произойти хотя бы одно из них.

7. События называют *гипотезами*, если они несовместны и образуют полную группу.

8. *Противоположными событиями* $\{A, \overline{A}\}$ называют пару гипотез.

9. *Случаями* называют равновозможные гипотезы.

10. *Суммой* $\sum_{i=1}^{n} A_i$ *событий* A_i, $i = \overline{1, n}$ называют событие, состоящее в осуществлении хотя бы одного из событий-слагаемых A_i (отсюда можно было бы определить произведение события на число; впрочем, указанное произведение не имеет практических приложений).

11. *Произведением* $\prod_{i=1}^{n} A_i$ *событий* A_i, $i = \overline{1, n}$ называют событие, состоящее в осуществлении всех событий-сомножителей A_i.

12. Разностью $A \setminus B$ двух событий называют событие, состоящее в осуществлении первого события и неосуществлении второго (из определений произведения и противоположного события следует, что $A \setminus B = A\overline{B}$).

1.2 Случайные величины

Случайной величиной X называется величина, которая принимает заранее неизвестное значение из некоторого множества $\{x\}$. Если это множество является счетным, то случайную величину называют *дискретной*; иначе ее называют *непрерывной*.

Законом распределения называют связь между возможными значениями случайной величины и соответствующими вероятностями. Наиболее общей формой закона распределения является *функция распределения – вероятность того, что случайная величина X примет значение, меньшее заданного x*:

$$F(x) = P(X < x).$$

Функция распределения – неотрицательная неубывающая функция, изменяющаяся от 0 до 1:

$$F(-\infty) = 0,\ F(\infty) = 1.$$

Вероятность попадания случайной величины на данный полуоткрытый интервал $[\alpha;\beta)$ равна $P(\alpha \le X < \beta) = F(\beta) - F(\alpha)$.

Случайные величины называют *независимыми*, если значение любой из них не сказывается на законах распределения остальных.

Ряд распределения дискретной случайной величины – это множество пар (x_i, p_i) ее значений x_i и соответствующих им вероятностей p_i. Графическое изображение ряда распределения называют *многоугольником распределения*. Функция распределения дискретной случайной величины является «ступенчатой»: она постоянна всюду за исключением счетного множества точек.

Значения непрерывной случайной величины нельзя перенумеровать, поэтому такую случайную величину нельзя охарактеризовать рядом распределения; каждое отдельное значение непрерывной случайной величины имеет *нулевую вероятность*.

Для описания непрерывной случайной величины привлекают *плотность вероятности* – производную от функции распределения:

$$f(x) = F'(x).$$

График плотности вероятности называют *кривой распределения*.

Так как функция распределения неубывающая, то плотность вероятности оказывается неотрицательной.

По известной плотности функцию распределения можно найти как интеграл

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt.$$

Предельные значения функции распределения при $x \to \pm\infty$ равны единице и нулю, соответственно. Как следствие,

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1.$$

Это соотношение называют *условием нормировки*.

Вероятность нахождения случайной величины на интервале $[\alpha;\beta)$:

$$P(\alpha \le X < \beta) = \int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx.$$

Когда использование функции распределения оказывается избыточным, для описания случайной величины привлекают *числовые характеристики*. Важнейшими среди них являются *начальные* и *центральные моменты*.

Начальный момент порядка *s* дискретной случайной величины *X* находится как сумма:

$$\alpha_s = \sum_i x_i^s p_i \, .$$

В последнем соотношении суммирование распространяется на все возможные значения случайной величины. Если случайная величина *X* распределена непрерывно, то ее начальный момент порядка *s* может быть найден как интеграл:

$$\alpha_s = \int_{-\infty}^{\infty} x^s f(x) dx,$$

где $f(x)$ – плотность вероятности.

Центральный момент порядка *s* дискретной случайной величины находится как сумма:

$$\mu_s = \sum_i (x_i - \alpha_1)^s p_i \, .$$

Для непрерывной случайной величины:

$$\mu_s = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \alpha_1)^s f(x) dx .$$

Важнейшими моментами являются *первый начальный* и *второй центральный*. Они имеют специальные названия.

Математическим ожиданием случайной величины называют ее первый начальный момент:

$$M[X]=\alpha_1.$$

Математическое ожидание характеризует положение «центра» распределения.

Дисперсией (или *рассеянием*) случайной величины называют ее второй центральный момент:

$$D[X]=\mu_2.$$

С дисперсией связано *стандартное отклонение* (иначе, *среднее квадратичное отклонение*): $\sigma = \sqrt{D[X]}$ – характеристика, размерность которой совпадает с размерностью случайной величины.

Дисперсия характеризует степень выраженности «хвостов» распределения – вероятность появления значений, удаленных от математического ожидания.

Справедливы свойства:

1. Математическое ожидание суммы независимых случайных величин равно сумме их математических ожиданий.

2. Математическое ожидание произведения независимых случайных величин равно произведению их математических ожиданий.

3. Постоянный множитель можно выносить за знак математического ожидания.

4. Дисперсия суммы двух случайных величин равна сумме их дисперсий; как следствие, дисперсия случайной величины не измениться при сложении с неслучайной величиной (константой).

5. Постоянный множитель можно выносить за знак дисперсии, возводя его в квадрат.

Функция распределения есть вероятность события $X < x$. На практике вместо задачи отыскания вероятности может возникнуть обратная задача: для известной вероятности p события $X < x_p$ найти значение x_p случайной величины. Соответствующее значение x_p называется *p-квантилью* (или *процентной точкой*) и может быть найдено как решение уравнения:

$$F(x_p) = p;$$

таким образом, квантиль – это значение функции, обратной к функции распределения.

Важнейшей квантилью является *медиана* $x_{1/2}$: значение случайной величины, для которого события $X < x_{1/2}$ и $X \geq x_{1/2}$ равновероятны:

$$F(x_{1/2}) = \frac{1}{2}.$$

Медиана, как и математическое ожидание, характеризует положение «центра» распределения. Для этой же цели привлекают еще одну характеристику: *моду*. Модой дискретной случайной величины называют ее наиболее вероятное значение. Модой непрерывной случайной величины называют абсциссу единственного локального максимума ее плотности. Если число локальных максимумов плотности превышает единицу, то распределение называют многомодальным и считают, что моды оно не имеет.

1.3 Нормальное распределение

Встречающиеся на практике случайные величины (в частности, ошибки измерений) часто являются суммой большого числа независимых случайных слагаемых, причем влияние каждого слагаемого на всю сумму пренебрежимо мало. Можно доказать, что плотность вероятности такой суммы имеет вид

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}} = N(m, \sigma),$$

где m и σ – константы. Случайную величину с указанной плотностью называют *нормально распределенной* случайной величиной.

Входящие в выражение для плотности нормального закона числовые характеристики m и σ являются математическим ожиданием и стандартным отклонением случайной величины. Если $m = 0$ и $\sigma = 1$, то распределение $N(0,1)$ называют *стандартным* (или *нормированным*) *нормальным распределением*.

Нормальной кривой (или *кривой Гаусса*) называется график плотности вероятности нормального распределения. Нормальная кривая симметрична относительно прямой $x=m$; медиана совпадает с математическим ожиданием. В точке $x=m$ достигается и максимум плотности, поэтому мода нормального распределения совпадает с математическим ожиданием и медианой. По мере удаления от точки $x=m$ плотность быстро уменьшается, асимптотически приближаясь к нулю.

Функция нормального распределения

$$\Phi^*(m,\sigma,x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}e^{-\frac{(t-m)^2}{2\sigma^2}}dt$$

является неэлементарной функцией. При нахождении вероятностей в задачах с нормальным распределением используют функцию Лапласа

$$\Phi(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{t}e^{-\frac{u^2}{2}}du,$$

связанную с функцией $\Phi^*(m,\sigma,x)$ соотношением

$$\Phi^*(m,\sigma,x)=\Phi\left(\frac{x-m}{\sigma}\right)+\frac{1}{2}.$$

В частности, вероятность нахождения нормально распределенной случайной величины на интервале $[\alpha;\beta)$:

$$P[\alpha\le X<\beta)=\Phi\left(\frac{\beta-m}{\sigma}\right)-\Phi\left(\frac{\alpha-m}{\sigma}\right).$$

1.4 Распределения, связанные с нормальным

Некоторые распределения встречаются в математической статистике чаще других.

Распределением Пирсона, или χ^2*-распределением*, называют распределение суммы квадратов независимых случайных величин

$$X=\sum_{i=1}^{k}Y_i^2,$$

каждая из которых подчинена стандартному нормальному закону; число слагаемых k называют *числом степеней свободы* распределения.

Плотность χ^2-распределения

$$f(x)=\frac{e^{-\frac{x}{2}}x^{\frac{k}{2}-1}}{2^{\frac{k}{2}}\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)},$$

где $\Gamma(z)$ – *гамма-функция* $\Gamma(z)=\int_{0}^{\infty}t^{z-1}e^{-t}dt$. Графики плотности распределения Пирсона для различного числа степеней свободы приведены на рис. 1.1.

Распределением Стьюдента с k степенями свободы называется распределение случайной величины:

$$X=\frac{U}{\sqrt{kY}},$$

где U – случайная величина, подчиненная стандартному нормальному закону, Y – случайная величина, подчиненная χ^2-распределению с k степенями свободы.

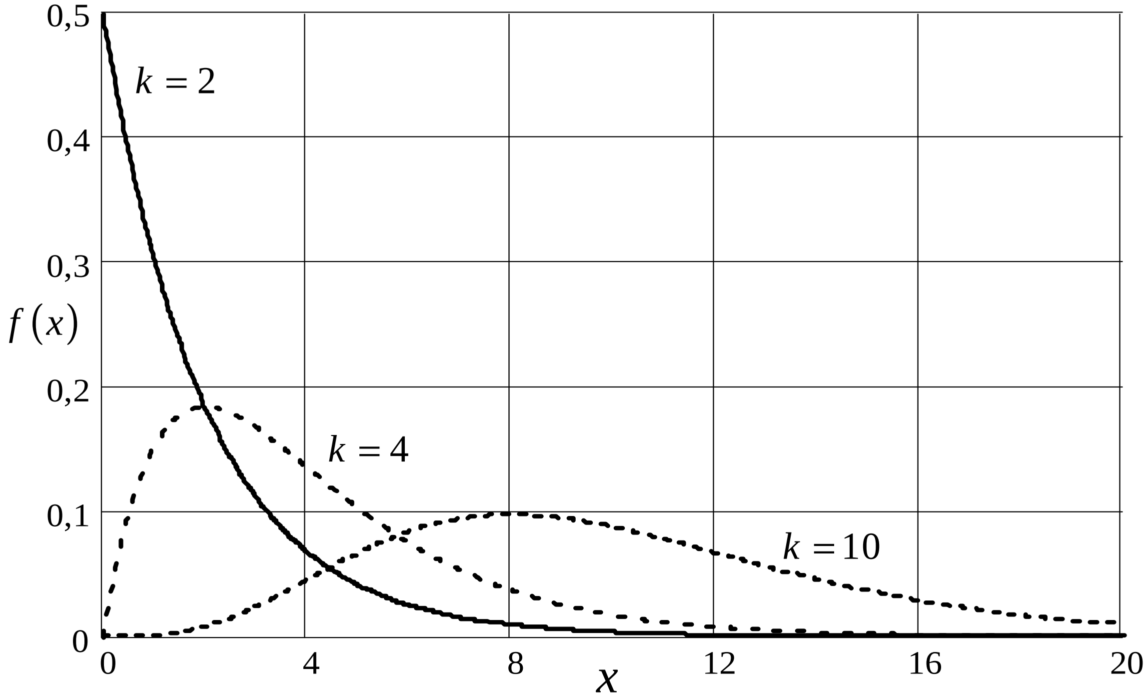

Рис. 1.1. Плотность χ^2-распределения

Плотность распределения Стьюдента:

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{\pi k}}\frac{\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)}\left(1+\frac{x^2}{k}\right)^{-\frac{k+1}{2}}.$$

График плотности распределения Стьюдента является симметричной колоколообразной кривой, скорость асимптотического приближения к оси абсцисс которой увеличивается с увеличением числа степеней свободы (рис. 1.2).

Распределением Фишера, или *F-распределением* с m и n степенями свободы называется распределение случайной величины

$$X=\frac{n}{m}\frac{Y_m}{Y_n},$$

где Y_m, Y_n – случайные величины, подчиненные χ^2-распределениям со степенями свободы m и n, соответственно.

Плотность F-распределения:

$$f(x)=\frac{1}{\mathrm{B}\left(\frac{m}{2},\frac{n}{2}\right)}\left(\frac{m}{n}\right)^{\frac{m}{2}}x^{\frac{m}{2}-1}\left(1+\frac{m}{n}x\right)^{-\frac{m+n}{2}},$$

где $\mathrm{B}(u,v)$ – *бета-функция*: $\mathrm{B}(u,v)=\int_0^1 t^{u-1}(1-t)^{v-1}dt=\frac{\Gamma(u)\Gamma(v)}{\Gamma(u+v)}$.

Графики плотности F-распределения для различного числа степеней свободы приведены на рис. 1.3.

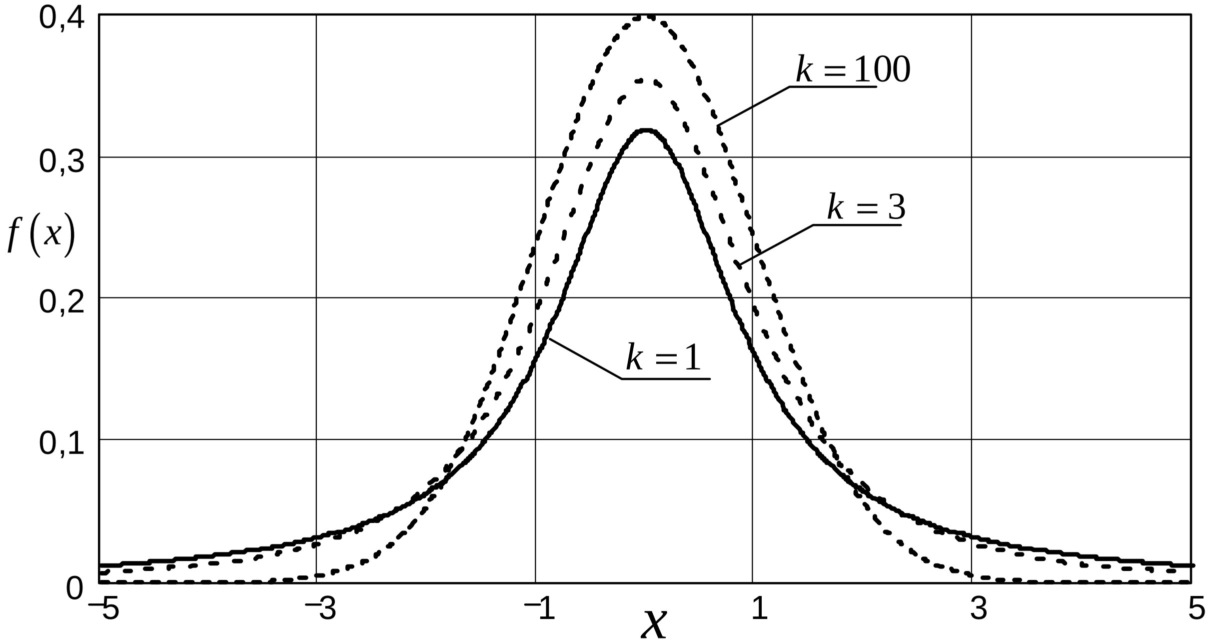

Рис. 1.2. Плотность распределения Стьюдента

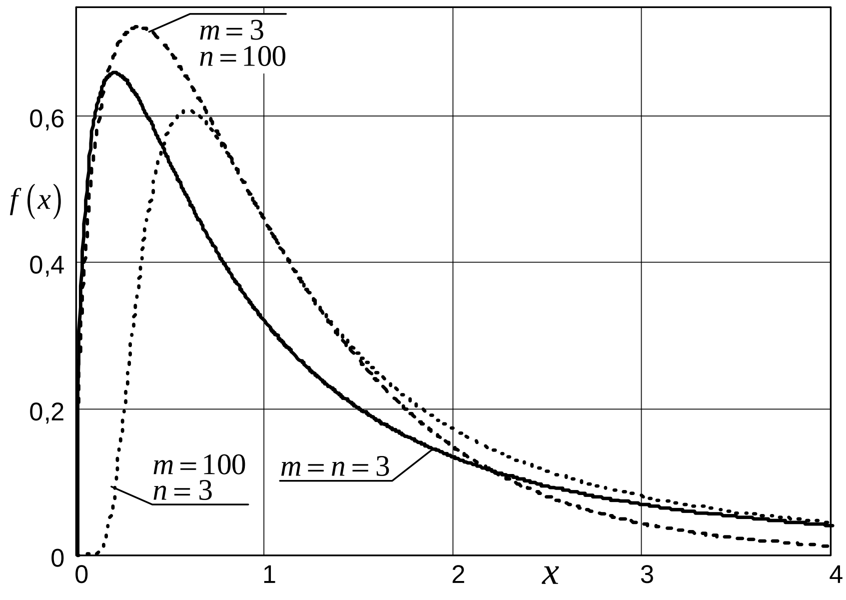

Рис. 1.3. Плотность F-распределения

Случайные величины, подчиненные χ^2-распределению и распределению Фишера, не могут принимать отрицательных значений. Графики плотности этих распределений асимметричны относительно своих математических ожиданий.