Статистика (3.1) подчинена $\chi^2$-распределению с числом степеней свободы $l-3$. С учетом этого ищется вероятность критического события, состоящего в том, что для выборки из нормально распределенной генеральной совокупности истинное (неизвестное) значение статистики окажется столь же большим (т.е., большим или равным), как и наблюдаемое на опыте значение. Если указанная вероятность близка к нулю (меньше выбранного уровня значимости $\alpha$), то нулевая гипотеза о нормальном распределении генеральной совокупности отвергается.

Вместо нахождения вероятности критического события можно сравнить найденное значение статистики (3.1) с квантилью $\chi^2$-распределения $\chi^2_{l-3,\alpha}$ для $l-3$ степеней свободы и выбранного уровня значимости $\alpha$. При выполнении неравенства

$$\chi^2 < \chi^2_{l-3,\alpha}$$

считают, что на уровне значимости $\alpha$ нет оснований отвергать нулевую гипотезу о нормальном распределении генеральной совокупности (вновь отметим, что истинность гипотезы этим не доказывается).

## 3.2 Проверка статистических гипотез: основные двухвыборочные задачи

На практике часто встречается случай, когда средний результат одной серии экспериментов отличается от среднего результата другой серии. При этом возникает вопрос, является обнаруженное расхождение средних статистически значимым – можно ли объяснить его случайными ошибками или же оно имеет закономерное происхождение. В промышленности такая задача сравнения возникает при контроле качества продукции, изготовленной при различных технологических режимах.

Значимость различия средних (оценок неизвестных математических ожиданий) зависит от генеральных дисперсий – малость различия в сравнении со стандартным отклонением указывает на его незначимость. Если математические ожидания (генеральные средние) оцениваются по результатам эксперимента (заменяются выборочными средними), то различие между средними может быть значимым даже в том случае, если оно незначительно по сравнению со стандартным отклонением (это имеет место для больших выборок). Поэтому «количественной характеристикой» различия между средними является стандартная ошибка – частное от деления оценки стандартного отклонения на корень из объема выборки.

Задача сравнения математических ожиданий решается различно в зависимости от того, являются ли известными дисперсии двух генеральных совокупностей, из которых извлечены выборки. Если дисперсии неизвестны, то способ решения зависит от того, считаются ли дисперсии равными. Наиболее просто задача сравнения математических ожиданий $M[X] = \bar{x}_0$ и $M[Y] = \bar{y}_0$ решается в первом случае.

Пусть дисперсии подчиненных нормальному закону генеральных совокупностей, из которых извлечены выборки

$$\{x_i\},\ \{y_j\},\ i=\overline{1,N_1},\ j=\overline{1,N_2}$$

известны и равны $\sigma_x^2$ и $\sigma_y^2$, соответственно. Тогда можно принять, что средние $\bar{x}$ и $\bar{y}$ подчинены нормальным распределениям $N(\bar{x}_0,\sigma_x)$ и $N(\bar{y}_0,\sigma_y)$ с плотностью

$$f(x)=\frac{1}{\sigma_x\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{(x-\bar{x}_0)^2}{2\sigma_x^2}\right),\ f(y)=\frac{1}{\sigma_y\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{(y-\bar{y}_0)^2}{2\sigma_y^2}\right).$$

Пусть проверяется гипотеза $H_0$ о равенстве математических ожиданий. В случае справедливости этой гипотезы случайная величина, равная разности $\bar{x}-\bar{y}$ средних, подчинена нормальному закону с нулевым математическим ожиданием

$$M[\bar{x}-\bar{y}]=M[\bar{x}]-M[\bar{y}]=0$$

и дисперсией

$$D[\bar{x}-\bar{y}]=D[\bar{x}]+D[\bar{y}]=\frac{\sigma_x^2}{N_1}+\frac{\sigma_y^2}{N_2}.$$

В последнем соотношении два слагаемых в правой части представляют собой ни что иное, как квадраты соответствующих стандартных ошибок. Так как неслучайный множитель можно выносить за знак дисперсии, возводя его в квадрат, то связанная с разностью $\bar{x}-\bar{y}$ средних статистика

$$t=\frac{\bar{x}-\bar{y}}{\sqrt{D[\bar{x}-\bar{y}]}}=(\bar{x}-\bar{y})\left(\frac{\sigma_x^2}{N_1}+\frac{\sigma_y^2}{N_2}\right)^{-\frac{1}{2}}$$

подчинена стандартному нормальному закону $N(0,1)$.

Пусть в качестве конкурирующей гипотезы выбрана двусторонняя альтернатива – гипотеза $H_1$, состоящая в том, что для математических ожиданий имеет место неравенство

$$M[X]\neq M[Y].$$

Тогда критическое событие $A$ состоит в том, что случайная величина, подчиненная стандартному нормальному закону, окажется не принадлежащей интервалу $(-|t|;|t|)$. Вероятность этого события

$$P(A)=1-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-|t|}^{-|t|}e^{-\frac{x^2}{2}}dx=1-2\Phi(|t|)=2-2\Phi^*(|t|),$$

где $\Phi$ – функция Лапласа, $\Phi^*$ – функция стандартного нормального распределения.

Если вероятность $P(A)$ оказывается меньше заранее выбранного уровня значимости, то гипотеза $H_0$ о равенстве математических ожиданий («генеральных средних») отвергается.

Пусть дисперсии генеральных совокупностей, из которых извлечены выборки $\{x_i\}$ и $\{y_j\}$ неизвестны, но предполагаются равными. Решение задачи сравнения генеральных средних начинается с вычисления смешанной оценки дисперсии разности выборочных средних:

$$D[\bar{x}-\bar{y}] = \frac{1}{N_1+N_2-2}\left(\frac{1}{N_1}+\frac{1}{N_2}\right)\left(\sum_{i=1}^{N_1}(x_i-\bar{x})^2+\sum_{i=1}^{N_2}(y_i-\bar{y})^2\right).$$

После этого находится эмпирическое значение статистики

$$t = \frac{\bar{x}-\bar{y}}{\sqrt{D[\bar{x}-\bar{y}]}}. \qquad (3.3)$$

Эта статистика подчинена распределению Стьюдента с $k = N_1 + N_2 - 2$ степенями свободы. Если нулевая гипотеза проверяется относительно двусторонней альтернативы $M[X] \neq M[Y]$, то вероятность критического события находится по формуле

$$P(A) = 1 - \frac{1}{\mathrm{B}\left(\frac{1}{2},\frac{k}{2}\right)\sqrt{k}}\int_{-|t|}^{|t|}\left(1+\frac{x^2}{k}\right)^{-\frac{k+1}{2}}dx,$$

где

$$\mathrm{B}(u,v) = \frac{\Gamma(u)\Gamma(v)}{\Gamma(u+v)} = \int_0^1 x^{u-1}(1-x)^{v-1}dx$$

– бета-функция.

Если вероятность $P(A)$ оказывается меньше выбранного уровня значимости, то гипотеза $H_0$ о равенстве генеральных средних отвергается в пользу альтернативы.

Пусть дисперсии генеральных совокупностей неизвестны и не предполагаются равными. Можно приближенно считать, что статистика

$$t = \frac{\bar{x}-\bar{y}}{\sqrt{D[\bar{x}-\bar{y}]}},$$

где

$$D[\bar{x}-\bar{y}] = \frac{1}{N_1+N_2-2}\left(\frac{1}{N_1}+\frac{1}{N_2}\right)\left(\sum_{i=1}^{N_1}(x_i-\bar{x})^2+\sum_{i=1}^{N_2}(y_i-\bar{y})^2\right),$$

также подчинена распределению Стьюдента. Однако соответствующее число степеней свободы уже не является целым числом:

$$k = \frac{\left(\frac{s_x}{N_1}+\frac{s_y}{N_2}\right)^2}{\frac{s_x^2}{N_1^2(N_1-1)}+\frac{s_y^2}{N_2^2(N_2-1)}},$$

где

$$s_x = \sqrt{s_x^2} = \sqrt{\frac{1}{N_1 - 1}\sum_{i=1}^{N_1}(x_i - \bar{x})^2}\,,\; s_y = \sqrt{s_y^2} = \sqrt{\frac{1}{N_2 - 1}\sum_{i=1}^{N_2}(y_i - \bar{y})^2}$$

– оценки стандартных отклонений.

Дисперсия признака и связанные с ней характеристики – стандартное отклонение и коэффициент вариации – характеризуют такие показатели, как точность машин, приборов, технологических процессов и т.д.

Пусть имеются две нормально распределенные генеральные совокупности с неизвестными дисперсиями $\sigma_x^2$ и $\sigma_y^2$. Необходимо проверить нулевую гипотезу $H_0$: $\sigma_x^2 = \sigma_y^2$ о равенстве дисперсий.

Задача проверки сводится к сравнению несмещенных оценок генеральных дисперсий

$$s_x^2 = \frac{1}{N_1 - 1}\sum_{i=1}^{N_1}(x_i - \bar{x})^2\,,\; s_y^2 = \frac{1}{N_2 - 1}\sum_{i=1}^{N_2}(y_i - \bar{y})^2\,.$$

В случае справедливости нулевой гипотезы статистика, равная отношению этих оценок

$$F = \frac{s_x^2}{s_y^2} \qquad (3.4)$$

подчинена распределению Фишера ($F$-распределению) с числом степеней свободы $N_1 - 1,\ N_2 - 1$.

Распределение Фишера несимметрично относительно своего математического ожидания. Функция $F$-распределения:

$$Q(F, a, b) = I\left(\frac{b}{b + aF}, \frac{b}{2}, \frac{a}{2}\right),$$

где

$$I(x, u, v) = \frac{1}{\mathrm{B}(u, v)}\int_0^x t^{u-1}(1-t)^{v-1}\,dt$$

– неполная бета-функция.

Вероятность критического события находится различным образом в зависимости от того, относительно какой из альтернатив (*односторонней* или *двусторонней*) проверяется нулевая гипотеза. Если проверка выполняется относительно двусторонней альтернативы $H_1$: $\sigma_x^2 \neq \sigma_y^2$, то вероятность критического события находится по формуле

$$P(A) = \begin{cases} P', P' \le 1 \\ 2 - P', P' > 1 \end{cases},$$

где

$$P' = 2Q\left(\frac{s_x^2}{s_y^2}, N_1 - 1, N_2 - 1\right).$$